ANALYSIS

Gebrochen rationale Funktionen

Aufgabensammlung Teil 2:

Funktionen mit Parametern
Funktionenscharen

Aufgaben im Abiturstil

Die Lösungen aller verwendeten Abituraufgaben stammen von mir

Neu eingerichtete Sammlung von Aufgaben.
Deren Bearbeitung ist noch nicht beendet.

Datei Nr. 43102

Stand: 29. März 2009

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt:

Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner

Typ 2 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner

Typ 4 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner +2

Aufgabe 761 $f_t(x) = \dfrac{t^2x^3 - 8}{4tx}$

Aufgabe 763 $f_a(x) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{a}{x}$

Aufgabe 771 $f_t(x) = \dfrac{t^2x^4 + 16t}{4x^2}$

Aufgabe 772 $f_t(x) = \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{tx^2}{4}$

Lösungen ab Seite 26

Typ 1 Funktionenscharen mit Grad Zähler < Grad Nenner
(a) Nenner ohne Summe

Aufgabe 162

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch

$$f_t(x) = \frac{x-2t}{x^2} \quad \text{für } t>0 \text{ und } x \in R \setminus \{0\}.$$

a) Untersuche das Schaubild K_t von f_t auf Nullstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte.

b) Zeichne K_1 für $x \in [-4\,;6]$. Welche Wertmenge hat f_t?

c) Wo schneidet die Tangente in der rechten Nullstelle von K_1 die Kurve K_1 noch einmal?

d) Die Gerade y = x schneidet K_1 in Z. Berechne die Koordinaten von Z durch ein Iterationsverfahren.

Aufgabe 163

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch $f_t(x) = \frac{4}{x} - \frac{4t}{x^2}$ für $t > 0$ und $x \in R \setminus \{0\}$

sowie die Funktion g durch $g(x) = \frac{4}{x}$.

K_t sei das Schaubild von f_t, G sei das Schaubild von g.

a) Berechne die Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte.
Bestimme die Gleichung der Kurve C, auf der alle Extrempunkte liegen.
Zeichne das Schaubild K_2 und G sowie C für $-6 \le x \le 6$ mit 1 cm y-Achse von –4 bis 8.

b) Wo schneidet die Tangente T_1 in der Nullstelle von K_t die Kurve K_t noch einmal?

c) Es gibt zwei Tangenten T_2 und T_3 an G, die zur Tangente T_1 orthogonal sind.
Bestimme deren Berührpunkte und Gleichungen. Trage sie für t = 2 in die Abbildung ein.

d) Lege vom Ursprung die Tangente T_1 an die Kurve K_2. Welche Gleichung hat sie?

e) Welche Kurve geht durch $A(8\,|\,5)$ bzw. durch $D(12\,|-1)$?
Durch welche Punkte der xy-Ebene geht keine dieser Scharkurven?

f) Die Koordinatenachsen und die Parallelen zu ihnen durch den Hochpunkt von K_t bilden ein Rechteck. Berechne dessen Umfang U(t).
Für welches t nimmt dieser Umfang einen Extremwert an?
Bestimme seine Art und Größe.

g) h sei eine beliebige Gerade durch den Punkt $N(1\,|\,0)$ des Schaubilds K_1.

Für welche Werte ihrer Steigungszahl m hat die Gerade h weitere Schnittpunkte mit K_1?

Aufgabe 171

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch

$$f_t(x) = \frac{x^2 - 4t^2}{x^3} \quad \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

a) Untersuche das Schaubild K_t von f_t auf Nullstellen, Asymptoten, Symmetrie, Extrem- und Wendepunkte. Bestimme die Gleichung der Ortskurve C aller Hochpunkte.
Zeichne K_1 und C für $-6 \le x \le 6$.

b) Die Kurve K_t, die x-Achse und die Parallele zur y-Achse durch den Hochpunkt begrenzen eine Fläche. Was ist am Inhalt dieser Fläche bemerkenswert?

c) Welcher Punkt Q der Ortskurve C der Hochpunkte hat vom Ursprung die kürzeste Entfernung?

Typ 1 Funktionenscharen mit Grad Zähler < Grad Nenner (b) Nenner mit einer Summe

Aufgabe 261

Gegeben ist die Funktion f_t für $t \in R$ durch $f_t(x) = 6\frac{x+2}{x^2+tx+5}$

K_t sei das Schaubild von f_t.

a) Untersuche das Schaubild K_4 auf Nullstelle, Asymptoten, Punkte mit waagerechter Tangente. Untersuche f_4 auf Monotonie und verwende das Ergebnis, um zu entscheiden, welcher der Punkte mit waagerechter Tangente Hoch- bzw. Tiefpunkt ist.

b) Zeichne das Schaubild K_4 für $-6 \le x \le 6$ in ein Achsenkreuz (Längeneinheit 1 cm). Überprüfe, ob das Schaubild K_4 zum Schnittpunkt mit der x-Achse punktsymmetrisch ist.

c) Das Schaubild K_4 schließt mit der x-Achse und der y-Achse im 2. Feld eine Fläche ein. Berechne deren Inhalt A.

d) Für welche Werte von t besitzt K_t senkrechte Asymptoten und wie viele?

e) Verschiebe das Schaubild K_4 so, dass ihr Schnittpunkt mit der x-Achse in den Ursprung fällt. Wie lautet die Gleichung der Bildkurve C?

Aufgabe 262 (BW 1984)

Zu jedem $t \in R \setminus \{0\}$ ist f_t gegeben durch $f_t(x) = 2t \cdot \frac{x-1}{x^2-tx+t}$. Ihr Schaubild sei K_t.

a) Untersuche K_2 auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Hoch- und Tiefpunkte. Zeichne K_2 für $-4 \le x \le 6$ mit Längeneinheit 1 cm.

b) C sei das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \frac{4x}{x^2+1}$

Weise nach, dass K_2 aus C durch Verschiebung in x-Richtung hervorgeht.
Zeichne C für $|x| \le 4$ in das vorhandene Achsenkreuz ein.

Die Schaubilder K_2 und C begrenzen zwischen ihren Schnittpunkten eine Fläche. Bestimme deren Inhalt.

c) Untersuche K_t für allgemeines t auf Asymptoten und Extrempunkte.

d) Zeige, dass die Bestimmung der Wendepunkte von K_t auf die Gleichung $x^3 - 3x^2 + t = 0$ führt. Untersuche die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung in Abhängigkeit von t.
(Betrachte die Extrempunkte des Schaubildes der Funktion $h(x) = x^3 - 3x^2 + t$ für $x \in R$).

Sehr schwere Aufgabe über eine Funktionenschar mit allerlei Besonderheiten und vielen Fallunterscheidungen bei der Bestimmung von Polstellen, Extrem- und Wendepunkten. Sehr lehrreich zum festigen des Grundlagenwissens, für eine Abituraufgabe sehr anspruchsvoll und zu umfangreich.